Sistemul axiomatic Hilbert – Ackermann

Reguli de formare:

1. variabilele propoziționale sunt formule
2. dacă A este o formulă, atunci ~A este de asemenea o formulă
3. dacă A şi B sunt formule, atunci A v B, A·B, A+B, A→B, A=B, A/B, A↓B sunt de asemenea formule

Definiții:

1. p→q = ~p v q
2. p · q = ~(~p v ~ q)
3. (p = q) = ~[~(~p v q) v ~(~q v p)]
4. p/q = ~p v ~q
5. p ↓ q = ~(p v q)

Axiome:

1. (p v p) → p
2. p → (p v q)
3. (p v q) → (q v p)
4. (p → q) → ((r v p) → (r v q))

Reguli de deducție:

I. Regula detaşării (modus ponens). Dacă este dovedit A şi dacă este dovedit A → B, atunci este dovedit B

II. Regula substituției. Într-o formulă A, o variabilă propozițională α poate fi substituită cu o formulă oarecare B, cu condiția ca variabila α să fie înlocuită pretutindeni, în formula A, cu B

III. Regula idempotentei disjuncției. A v A ⊢ A

Dem. Ax.1, p/A, I, - III

IV. Regula extinderii disjuncției A ⊢ A v B

Dem. Ax.2, p/A, q/B, I, - IV

V. Regula comutativității disjuncției. A v B ⊢ B v A

Dem. Ax.3, p/A, q/B, I – V

VI. Regula extinderii disjunctive a termenilor implicației. A → B ⊢ (C v A) → (C v B)

Dem. Ax.4, p/A, q/B, r/C, I – VI

Th.1 (p → q) → ((r → p) → (r → q)

Dem. Ax.4, r/~r, Def. 1, - Th.1

VII. Regula silogismului sau regula tranzitivității. Dacă este dovedit A → B şi B → C, atunci este dovedit şi A → C

Dem. Th.1, p/B, q/C, r/A, I, I – VII

Th.2 ~p v p (legea terțului exclus)

Dem. Ax.2, q/p*, (*, Ax.1), VII, def. 1 – Th.2

Th.3 p v ~p

Dem. Th.2, V – Th.3

Th.4 p → ~ ~ p

Dem. Th.3, p/~p, def.1 – Th.4

Th.5 ~~p → p

Dem. Th.4, p/~p, VI în care (c/p)*, (*, Th.3), I, V, def.1 – Th.5

Obs.: din Th.5 şi Th.4 se obține prin def.3 p = p

Th.6 (p → q) →(~q → ~p) (legea contrapoziției)

Dem. Th.4, p/q, VI*; Ax.3, p/~p, q/~~q**, (*, **), VII, def. 1 – Th.6

VIII. Regula substituirii expresiilor echivalente. Dacă două expresii sunt echivalente atunci ele pot fi înlocuite în aceeaşi formulă fără a se condiționa substituirea lor în toate aparițiile. (vezi regula II unde substituirea era posibilă între două expresii, care nu trebuie sa fie echivalente, dar substituirea trebuie făcută peste tot în formula dată).

Th.7 (q v p) → (p v q)

Dem. Ax.3, V, V – Th.7

Th.8 ~(p · q) → ~p v ~q

Dem. Th.5, p/ ~p v ~q, def.2 – Th.8

Th. 9 (~p v ~q) → ~(p · q)

Dem. Th.4, p/~p v ~q, def. 2 – Th.9

Th.10 ~(p v q) → (~p · ~q)

Dem. (Th.4, Th.5), VII, p/~(p v q), VIII (p/~~p, q/~~q numai în consecvent), VIII (~(~~p v ~~q)/~p · ~q) – Th. 10

Th.11 (~p · ~q) → ~(p v q)

Dem. (Th.4, Th.5), VII, p/~(p v q), VIII (p/~~p; q/~q numai în antecedent), VIII (~(~~p v ~~q)/~p · ~q) – Th.11

Th.12 (p · q) → (q · p)

Dem. Th.6, p/p v q, q/ (q v p)*, (Ax.3, *), I, p/~q, q/~p, VIII (cu def. 2) – Th.12

Th.13 (q · p) → (p · q)

Dem. Th.12, p/q, q/p – Th.13

Sau: Dem. Th.6, p/p v q, q/ (q v p)*, (Ax.3, *), I, p/~p, q/~q, VIII (cu def. 2) – Th.13

Th.14 (p · q) → p

Dem. Th.6, q/p v q*, (Ax.2, *), I, p/~p, q/~q, VIII ~~p/p, ~~q/q – Th.14

Th.15 (p · q) → q

Dem. Th.14, p/q, q/p*, (Th.12, *), VII – Th.15