Logica predicatelor

Simbolismului propozițional i se adaugă:

1. x, y, z, ... variabile individuale – mulțimea indivizilor la care se raportează este **domeniul** de semnificație
2. a, b, c, ..., x_1, y_1, ... x_2, y_2, ... – constante individuale
3. F, G, H, ... variabile predicative
4. Fx, Fy, ... scheme de funcții propoziționale
5. Fx, ... predicate monadice
   G (x, y) ... predicate diadice
   H (x, y, z) ... predicate triadice
   ...
6. Fa, Fb, Fc, ... scheme de propoziții individuale
7. ∃xFx, ∃yGy ... scheme de propoziții existențiale
8. ∀xFx, ∀yGy ... scheme de propoziții universale

Reguli de formare a expresiilor

1. Orice variabilă va fi expresie (formulă)
2. Orice aplicare a unei variabile predicative la una sau mai multe variabile individuale va fi expresie (ex. Fx, Gx, ...)
3. Dacă A este expresie, ~A va fi expresie
4. Dacă A(x) este o expresie a care conține variabila x necuantificată (liberă), atunci ∃xAx şi ∀xAx vor fi expresii
5. Dacă A şi B sunt expresii atunci A · B, A v B, A → B, A = B etc. sunt expresii sub condițiile:
   a. Una şi aceeaşi variabilă nu va apare într-o parte liberă şi în alta cuantificată (ex. ∀x∃y G(x, y) · H (x, y) – incorect!)
   b. O variabilă nu se poate afla sub acțiunea ambilor cuantori în acelaşi timp
6. Partea din formulă la care se referă un cuantor va fi numită domeniul de acțiune al cuantorului. Dacă după cuantor nu se deschide o paranteză, atunci domeniul cuprinde numai schema propozițională (ex. ∀xFx · Gx – domeniul cuprinde Fx, nu şi Gx)

Echivalențe logice intre cuantori

1. ∀xAx = ~(∃x~Ax)
2. ∀x~Ax = ~(∃xAx)
3. ∃xAx = ~(∀x~Ax)
4. ∃x~Ax = ~(∀xAx)
5. ∀xAx = (Ax_1 · Ax_2 · ...)
6. ∃xAx = (Ax_1 v Ax_2 v ...)

Poziția şi ordinea cuantorilor

∀x∃y A(x, y); ∃x∀y A(x, y) – prefix neomogen, ordine determinată, domeniu comun

∀x∀y A(x, y); ∃x∃y A(x, y) – prefix omogen – ordine indiferentă, domeniu comun

1. ∀x∀y A(x, y) = ∀y∀x A(x, y)
2. ∃x∃y A(x, y) = ∃y∃x A(x, y)
3. ∃x∀y A(x, y) → ∀y∃x A(x, y)

Distributivitatea

1. ∀x (Ax · Bx) = ∀xAx · ∀xBx
2. ∃x (Ax v Bx) = ∃xAx v ∃xBx
3. (∀xAx v ∀xBx) → ∀x (Ax v Bx)
4. ∃x (Ax · Bx) → (∃xAx · ∃xBx)
5. ∀x (Ax → Bx) → (∀xAx → ∀xBx)
6. (∃xAx → ∃xBx) → ∃x (Ax → Bx)

Dualitatea cuantorilor

Dacă o formulă A este formată numai din operatori din mulțimea {~, ·, v, ∃, ∀}, o formulă A* obținută din A prin înlocuirea fiecărui operator cu dualul său va fi numită duala lui A

Reguli:

1. dacă A este lege logică, atunci A* este lege logică
2. dacă A=B este lege logică, atunci A*=B* este lege logică
3. dacă A→B este lege logică, atunci B*→A* este lege logică

Negarea expresiilor cuantificate

Conform echivalențelor 1-4: se înlocuieşte cuantorul cu dualul său şi se pune negația pe domeniul de acțiune.

Ex. ∀x (Fx → Gx) are negația ∃x ~(Fx → Gx) = ∃x (Fx · ~Gx)