

Calculul natural

Metoda condițională

Se aplică în special atunci când ceea ce trebuie demonstrat este o implicație, adică: „dacă A, atunci B”. Se presupune că A (antecedentul) este dat și, cu ajutorul celorlalte formule date, se dovedește că $A \rightarrow B$ (pentru cazul în care A este dat!)

Metoda condițională poate fi folosită ca o secvență într-o demonstrație dacă se respectă regulile:

- Prima linie din secvență este antecedentul
- Ultima linie din secvență este consecventul
- Nu se poate folosi în demonstrație decât implicația finală, în nici un caz vreuna din liniile secvenței
- Orice secvență trebuie închisă
- În orice secvență pot fi folosite formulele exterioare ei (dar nu din interiorul altor secvențe *închise*)

Exemple:

(a) Metoda condițională directă:

1. $A \rightarrow (B \cdot C)$	
2. $(B \vee D) \rightarrow E$	/ $A \rightarrow E$
3. A	presupunem prin metoda condițională (PMC)
4. $B \cdot C$	1, 3 Modus Ponens (MP)
5. B	4 Simplificare (Simpl.)
6. $B \vee D$	5 Extinderea disjunctivă (ED)
7. E	2, 6 MP
8. $A \rightarrow E$	3-7 Demonstrație condițională (DC)

(b) Metoda condițională secvențială:

1. $G \rightarrow (H \cdot I)$	
2. $J \rightarrow (K \cdot L)$	
3. $G \vee J$	/ $H \vee K$
4. G	PMC
5. $H \cdot I$	1, 4 MP
6. H	5 Simpl
7. $G \rightarrow H$	4-6 DC
8. J	PMC
9. $K \cdot L$	2, 8 MP
10. K	9 Simpl
11. $J \rightarrow K$	8-10 DC
12. $(G \rightarrow H) \cdot (J \rightarrow K)$	7, 11 Conjuncție (C)
13 $H \vee K$	3, 12 Dilema Constructivă (DCon)

(c) Metoda condițională integrată

1. $L \rightarrow [M \rightarrow (N \vee O)]$	
2. $M \rightarrow \sim N$	/ $L \rightarrow (\sim M \vee O)$
3. L	PMC
4. $M \rightarrow (N \vee O)$	1,3 MP
5. M	PMC
6. $N \vee O$	4, 5 MP
7. $\sim N$	2, 5 MP
8. O	6, 7 Silogismul disjunctiv (SD)
9. $M \rightarrow O$	5, 8 DC
10 $\sim M \vee O$	9, Definiția implicației (Def Impl)
11. $L \rightarrow (\sim M \vee O)$	3-10 DC

Metoda reducerii la absurd

Se presupune negația concluziei, apoi se derivă o contradicție și astfel se demonstrează concluzia.

Reguli:

- Orice secvență trebuie închisă
- Nici o formulă din secvență nu poate fi folosită în afara ei, ci doar în interior
- Într-o secvență se pot folosi formula din exteriorul ei (dar nu din interiorul altor secvențe *închise*)

Exemple:

(a) *reducerea directă la absurd*

- | | |
|---|--|
| 1. $(A \vee B) \rightarrow (C \cdot D)$ | |
| 2. $C \rightarrow \sim D$ | / $\sim A$ |
| 3. A | Presupunem prin Reducere la Absurd (PRA) |
| 4. $A \vee B$ | 3, Ext. Disj |
| 5. $C \cdot D$ | 1, 4 MP |
| 6. C | 5, Simpl |
| 7. $\sim D$ | 2, 6 MP |
| 8. D | 6, Simpl |
| 9. $D \cdot \sim D$ | 7, 8 Conj |
| 10. A | 3-9 prin Reducere la Absurd (RA) |

(b) *reducerea la absurd ca secvență intermediară*

- | | |
|---|--------------------|
| 1. $E \rightarrow [(F \vee G) \rightarrow (H \cdot J)]$ | |
| 2. $E \cdot \sim(J \vee K)$ | / $\sim(F \vee K)$ |
| 3. E | 2, Simpl |
| 4. $(F \vee G) \rightarrow (H \cdot J)$ | 1, 3 MP |
| 5. $\sim(J \vee K)$ | 2, Simpl |

- | | |
|---------------------------|--------------|
| 6. $\sim J \cdot \sim K$ | 5 DeMorgan |
| 7. F | PRA |
| 8. $F \vee G$ | 7 Ext Disj |
| 9. $H \cdot J$ | 4, 8 MP |
| 10. J | 9 Simpl |
| 11. $\sim J$ | 6 Simpl |
| 12. $J \cdot \sim J$ | 10, 11 Conj |
| 13. $\sim F$ | 7-12 RA |
| 14. $\sim K$ | 6 Simpl |
| 15. $\sim F \cdot \sim K$ | 13, 14 Conj |
| 16. $\sim(F \vee K)$ | 15, DeMorgan |

(c) *reducerea la absurd ca secvență integrată*

- | | |
|---|-------------------------------|
| 1. $L \rightarrow [\sim M \rightarrow (N \cdot O)]$ | |
| 2. $\sim N \cdot P$ | / $L \rightarrow (M \cdot P)$ |
| 3. L | PMC |
| 4. $\sim M \rightarrow (N \cdot O)$ | 1,3 MP |
| 5. $\sim M$ | PRA |
| 6. $N \cdot O$ | 4, 5 MP |
| 7. N | 6 Simpl |
| 8. $\sim N$ | 2 Simpl |
| 9. $N \cdot \sim N$ | 7, 8 Conj |
| 10. $\sim \sim M$ | 5-9 RA |
| 11. M | 10 Dubla Negație (DN) |
| 12. P | 2 Simpl |
| 13. $M \cdot P$ | 11, 12 Conj |
| 14. $L \rightarrow (M \cdot P)$ | 3-13 DC |